3次元形状を2次元面に投影する

教科書　5章

3次元形状の2次元面への投影

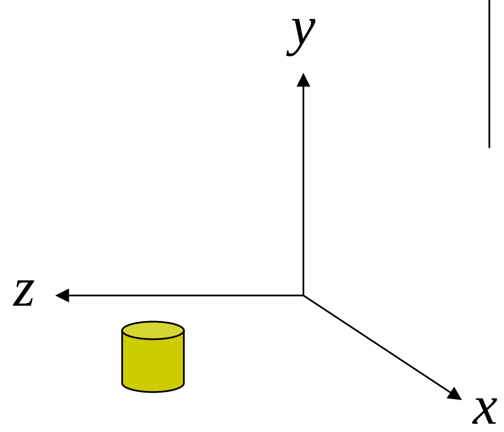
- CGでは，モデリングされた形状をディスプレイに表示したり，プリンタで印刷することによって立体を表現する.
- その際，3次元空間内に定義した形状を2次元面上に投影する変換（投影変換）が必要となる.

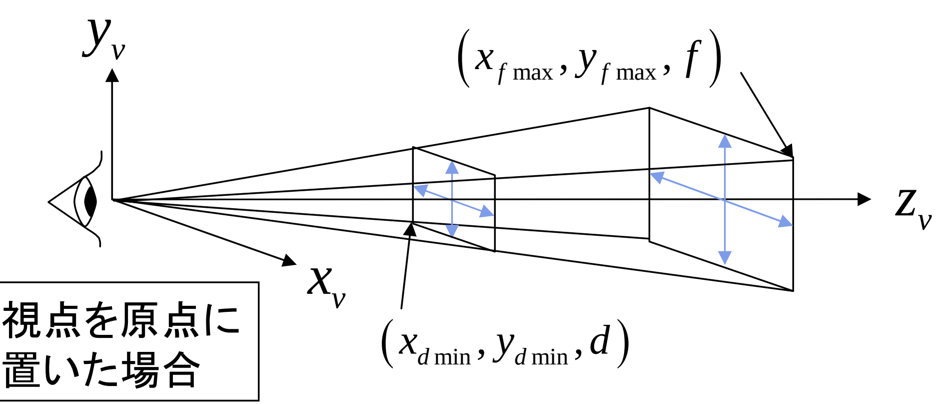
3つの座標系

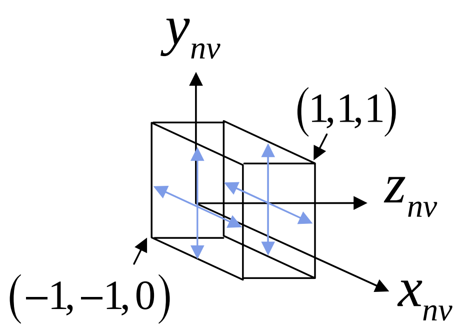
- これからの議論を明確にするために3つの座標系を定義する.
  - 全体座標系（world coordinate system）: (x,y,z)
    - 3次元モデルが定義されている座標系（右手系）
  - 視座標系（viewing coordinate system）: (x_v,y_v,z_v)
    - 視線を z_v 軸とした座標系（通常，左手系）
  - 正規化視座標系（normalized viewing coordinate system）: (x_{nv},y_{nv},z_{nv})
    - 視座標系の可視領域を正規化した座標系（通常，左手系）
    - 隠面・隠線処理で必要となる.

3つの座標系(cont.)

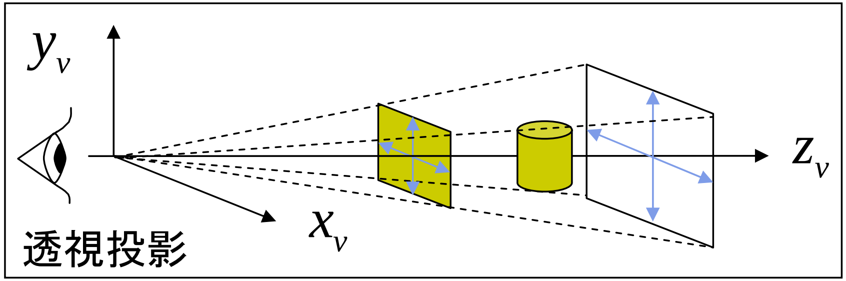
- 座標系の定義(cont.)
  - 全体座標系: (x,y,z)
  - 視座標系: (x_v,y_v,z_v)
  - 正規化視座標系: (x_{nv},y_{nv},z_{nv})



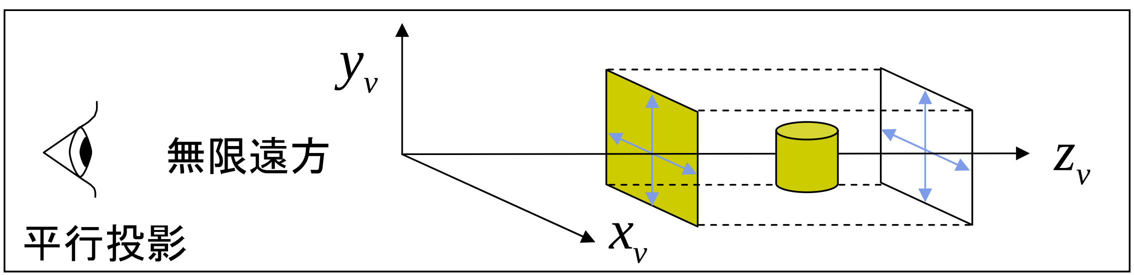




投影変換

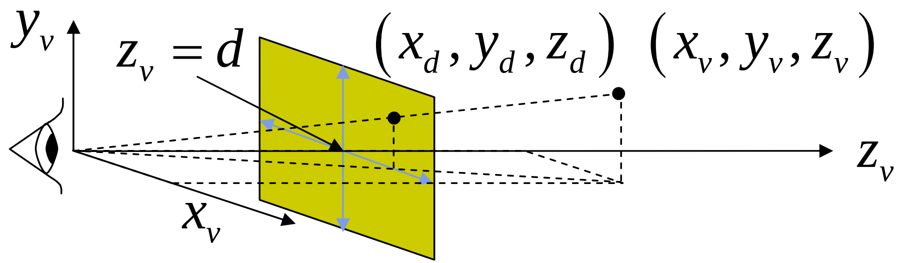


- 投影変換とは
  - 3次元空間内に定義した形状を2次元面上に投影する変換
    - 透視投影変換
      - 視点を z_v 軸上に置いて，z_v 軸に垂直な面に投影する変換
    - 平行投影変換
      - 視座標系の原点を全体座標系の原点から無限遠方において，z_v 軸に垂直な面に投影する変換

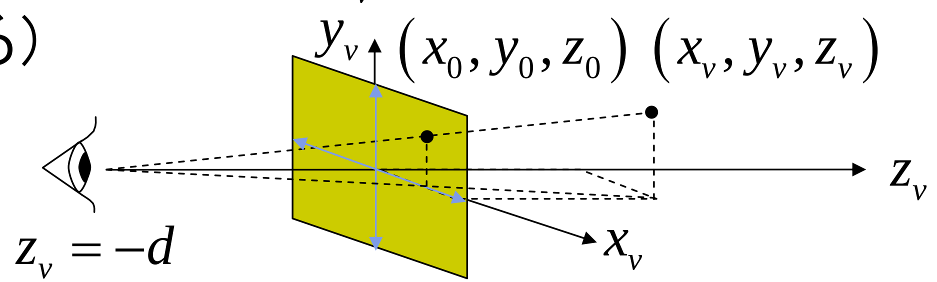


透視投影変換

- 透視投影変換では視点と投影面の位置を違えた2つの変換が使われる.
  - 視点 $z_v=0$, 投影面 $z_v=d$（通常こちらが使われる）



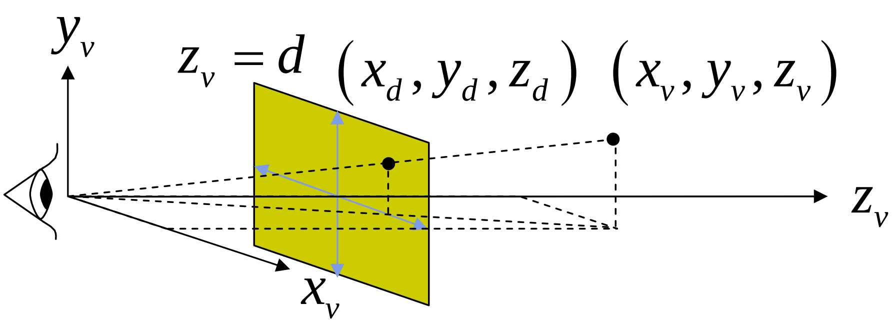
  - 視点 $z_v=-d$, 投影面 $z_v=0$（$d\to\infty$ のとき平行投影変換となる）



透視投影変換(cont.)

- 視点 z_v =0，投影面 z_v =d のときの透視投影変換
  - 点 (x_v,y_v,z_v) と投影点 (x_d,y_d,z_d) の関係は次式となる.

$$\frac{x_d}{d}=\frac{x_v}{z_v},\ \frac{y_d}{d}=\frac{y_v}{z_v},\ z_d=d\ \Rightarrow\ x_d=\frac{x_v}{z_v/d},\ y_d=\frac{y_v}{z_v/d},\ z_d=d$$



透視投影変換(cont.)

- 視点 z_v =0，投影面 z_v =d (cont.)
  - これらの関係を同次座標で表せば次式となる.

$$\begin{Bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \\ W_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

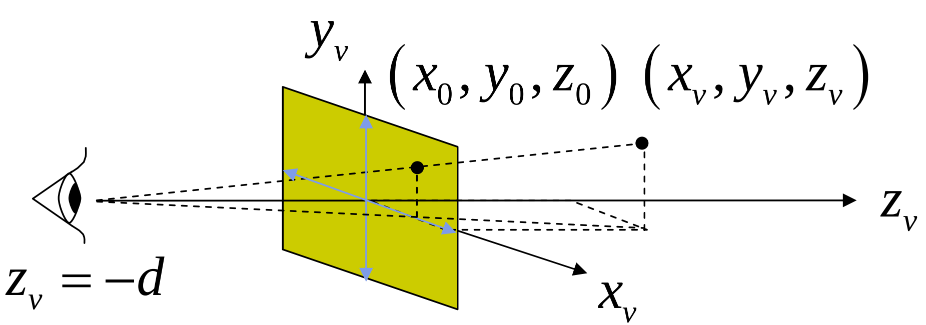
    - 実際，次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} X_d \\ Y_d \\ Z_d \\ W_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ z_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x_v}{z_v/d} \\ \dfrac{x_v}{z_v/d} \\ d \end{Bmatrix}$$

透視投影変換(cont.)

- 視点 $z_v = -d$, 投影面 $z_v = 0$ の透視投影変換
  - 点 (x_v, y_v, z_v) と投影点 (x_0, y_0, z_0) の関係は次式となる.

$$\frac{x_0}{d} = \frac{x_v}{z_v + d},\ \frac{y_0}{d} = \frac{y_v}{z_v + d},\ z_0 = 0 \ \Rightarrow\ x_0 = \frac{x_v}{1 + z_v/d},\ y_0 = \frac{y_v}{1 + z_v/d},\ z_d = 0$$



透視投影変換(cont.)

- 視点 $z_v = -d$, 投影面 $z_v = 0$ (cont.)
  - これらの関係を同次座標で表せば次式となる.

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

    - 実際, 次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ 0 \\ 1 + z_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{x_v}{1 + z_v/d} \\ \dfrac{x_v}{1 + z_v/d} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

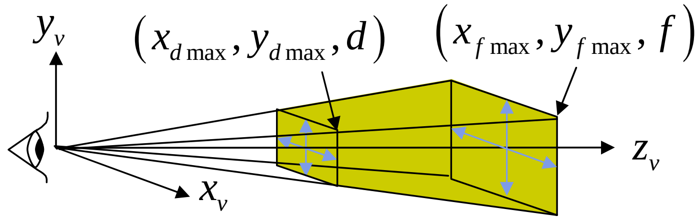
  - $d \to \infty$ のとき平行投影変換となる.

正規化視座標系への変換

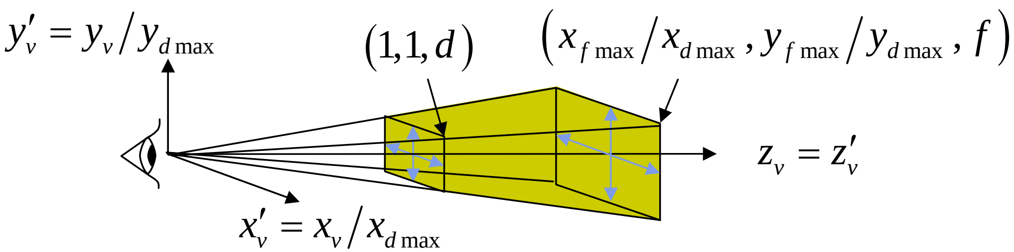
- 透視投影変換により3次元空間内の点が投影面に変換されることから，直線や平面も投影面に変換可能である.
- しかし，透視投影変換では奥行きの情報が失われる.
- 立体を認識するためには奥行き情報に基づく隠面・隠線処理が必要となる.
- 透視投影変換の奥行き情報は正規化視座標系で表現される.

正規化視座標系への変換(cont.)

- 視点 z_v =0，投影面 z_v =d として，可視領域（viewing volume）を $d \le z_v \le f$ と仮定する．



- x_v-y_v 正規化視座標系: (x_v', y_v', z_v')



正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を $d \le z_v \le f$ と仮定する. (cont.)
  - x_v-y_v 正規化座標系: (x_v', y_v', z_v') への変換

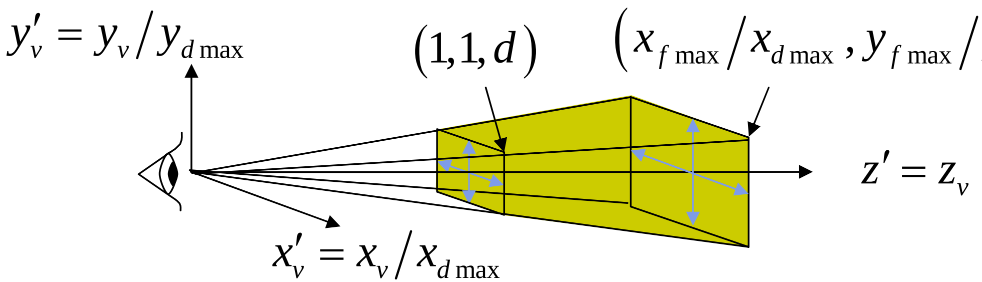
$$\begin{Bmatrix} X_v' \\ Y_v' \\ Z_v' \\ W_v' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/x_{d\max} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/y_{d\max} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- 実際，次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} X_v' \\ Y_v' \\ Z_v' \\ W_v' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v / x_{d\max} \\ y_v / y_{d\max} \\ z_v \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_v / x_{d\max} \\ y_v / y_{d\max} \\ z_v \end{Bmatrix}$$

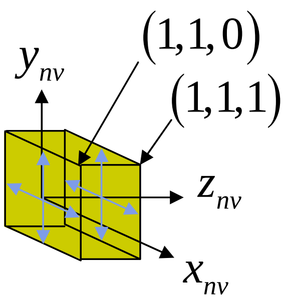
正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を $d \le z_v \le f$ と仮定する. (cont.)
  - 正規化視座標系: (x_{nv}, y_{nv}, z_{nv}) を想定して，可視領域が次のように変換されるような変換を考えよう.



$$\frac{x_{nv}}{d} = \frac{x'_v}{z'_v},\quad \frac{y_{nv}}{d} = \frac{y'_v}{z'_v},\quad z_{nv} = \alpha + \frac{\beta}{z'_v} = \frac{-1}{1-d/f}\frac{d}{z'_v} + \frac{1}{1-d/f}\frac{z'_v}{d}\frac{d}{z'_v}$$

$$\because \left.\begin{aligned} z'_v = d &\Rightarrow z_{nv} = 0 \\ z'_v = f &\Rightarrow z_{nv} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{1-d/f} \\ \beta = \dfrac{-d}{1-d/f} \end{cases}$$



正規化視座標系への変換(cont.)

- 可視領域を $d \le z_v \le f$ と仮定する. (cont.)
  - 正規化視座標系: (x_{nv}, y_{nv}, z_{nv}) への変換

$$
\begin{Bmatrix} X_{nv} \\ Y_{nv} \\ Z_{nv} \\ W_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1/d}{1-d/f} & \dfrac{-1}{1-d/f} \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \\ 1 \end{Bmatrix}
$$

    - 実際, 次のようになる.

$$
\begin{Bmatrix} x'_v \\ y'_v \\ \dfrac{-1+z'_v/d}{1-(d/f)} \\ z'_v/d \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_v/(z'_v/d) \\ y'_v/(z'_v/d) \\ \dfrac{-1/(z'_v/d)+1}{1-(d/f)} \end{Bmatrix}
$$

$$
\boxed{z'_v = d \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix},\ z'_v = f \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_{nv} \\ y_{nv} \\ z_{nv} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}
$$